Problema 14 (cinemática)

Se conocen algunos datos acerca de un movimiento en el plano (todos expresados en el sistema inercial):

$V_x = 2t - 4; \quad a_y = 2t; \qquad V_0 = 5 \qquad x_0 = 4 \qquad y_0 = -3$

***a)* Completar la información faltante**

Primero, reescribir las expresiones dadas en las unidades que corresponda. Por ejemplo:

$V_x = 2t - 4 \qquad \Rightarrow V_x = 2\frac{m}{s^2}t - 4\frac{m}{s}$

Y análogamente:

$a_y = 2t \qquad \Rightarrow a_y = 2\frac{m}{s^3}t$

Mientras que:

$V_0 = 5\frac{m}{s} \qquad x_0 = 4m \qquad y_0 = -3m$

Luego, usar las ecuaciones horarias que correspondan y los datos del movimiento y completar las siguientes tablas:

Identificaremos por letras a las distintos celdas de las tablas que figuran a continuación, que corresponden a las componentes x e y de la aceleración, velocidad y posición.

De esta forma, para obtener la componente x de la aceleración (celda A de la tabla), partimos de la componente x de la velocidad (celda B de la tabla) y planteamos:

$a_x = \frac{dVx}{dt} \quad \Rightarrow a_x = 2\frac{m}{s^2}$

Luego de hacer todos los desarrollos necesarios, las celdas de las tablas quedan:

$a_x = 2\frac{m}{s^2}$ $\boxed{A}$	$v_x = 2\frac{m}{s^2}t - 4\frac{m}{s}$ $\boxed{B}$	$x(t) = \frac{m}{s^2}t^2 - 4\frac{m}{s}t + 4m$ $\boxed{C}$
$a_x(t = 2s) = 2\frac{m}{s}$	$v_x(t = 2s) = 0$	$x(t = 2s) = 0$
$a_x(t = 3s) = 2\frac{m}{s}$	$v_x(t = 3s) = 2\frac{m}{s}$	$x(t = 3s) = 1m$
	$v_x(t = 0s) = v_{0x} = -4\frac{m}{s}$	$x(t = 0s) = 4m = x_0$

$a_y = 2\frac{m}{s^3}t$ D	$v_{y\pm}(t) = t^2\frac{m}{s^3} \pm 3\frac{m}{s}$ E	$y\pm(t) = \frac{t^3}{3}\frac{m}{s^3} \pm 3\frac{m}{s}t - 3m$ F
$a_y(t=2s) = 4\frac{m}{s}$	$v_{+y}(t=2s) = 7\frac{m}{s}$ $v_{-y}(t=2s) = 1\frac{m}{s}$	$y+(t=2s) = 5.33\,m$ $y-(t=2s) = -6.33\,m$
$a_y(t=2s) = 6\frac{m}{s}$	$v_{+y}(t=3s) = 12\frac{m}{s}$ $v_{-y}(t=3s) = 6\frac{m}{s}$	$y+(t=3s) = 15m$ $y-(t=3s) = -3m$
	$v_y(t=0s) = v_{0y} = \pm 3\frac{m}{s}$	$y(t=0s) = \text{-}3m = y_0$

Detallamos los desarrollos correspondientes a esta última tabla.
Para pasar de la componente en x de la velocidad (celda B) a la componente en x de la posición (celda C), planteamos:

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_{t_0=0}^{t} v_x\,dt' = \int_{x_0=4m}^{x} dx'$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t}\left(2\frac{m}{s^2}t' - 4\frac{m}{s}\right)dt' = x - 4m$$

$$= \left(\frac{m}{s^2}t'^2 - 4\frac{m}{s}t'\right)\Bigg|_0^t = x - 4m$$

$$= \frac{m}{s^2}t^2 - 4\frac{m}{s}t + 4m = x$$

$$\boxed{\Rightarrow x(t) = \frac{m}{s^2}t^2 - 4\frac{m}{s}t + 4m}$$

Conocida la componente x de la velocidad, podemos evaluarla para t=0s (a partir de la celda B)

$$\boxed{v_{0x} = v_x(t=0s) = -4\frac{m}{s}}$$

La componente en x de la posición para $t = 0s$ es dato y vale:

$$x_0 = 4m$$

Análogamente para las componentes en la coordenada y, comenzamos planteando que:

$$v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2$$

Considerando que por dato, conocemos v_o y que ya determinamos v_{0x}, vemos que podemos despejar v_{oy}, siendo:

$$v_{0y} = \pm\sqrt{v_0^2 - v_{0x}^2}$$

Reemplazando por los datos, obtenemos:

$$v_{0y} = \pm\sqrt{25\frac{m^2}{s^2} - 16\frac{m^2}{s^2}}$$

$$\boxed{v_{0y} = \pm 3\frac{m}{s} = v_y(t = 0s)}$$

Vemos que existen dos posibles valores para v_{0y}

Dado que la componente en y de la aceleración (celda D) es dato, para obtener la componente en y de la velocidad (celda E), planteamos:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

$$\int_{t_0=0}^{t} a_y dt' = \int_{v_{0y}}^{v_y} dv'y$$

$$\int_{t_0=0}^{t} \left(2t\frac{m}{s^3}\right) dt' = \int_{v_{0y}}^{v_y} dv_y'$$

$$\left(2\frac{t^2}{2}\frac{m}{s^3}\right)\Big|_{t_0=0}^{t} = v_y - v_{oy}$$

$$v_y(t) = t^2\frac{m}{s^3} + v_{oy}$$

Dado que v_{oy} puede tomar dos posibles valores:

$$\boxed{v_{y\pm}(t) = t^2\frac{m}{s^3} \pm 3\frac{m}{s}}$$

Y finalmente, para obtener la componente en y de la posición (celda F), planteamos:

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

Y procediendo en forma análoga, se obtiene:

$$\boxed{y\pm(t)=\frac{t^3}{3}\frac{m}{s^3}\pm 3\frac{m}{s}-3m}$$

Vemos que existen dos posibles valores para $v_y(t)$

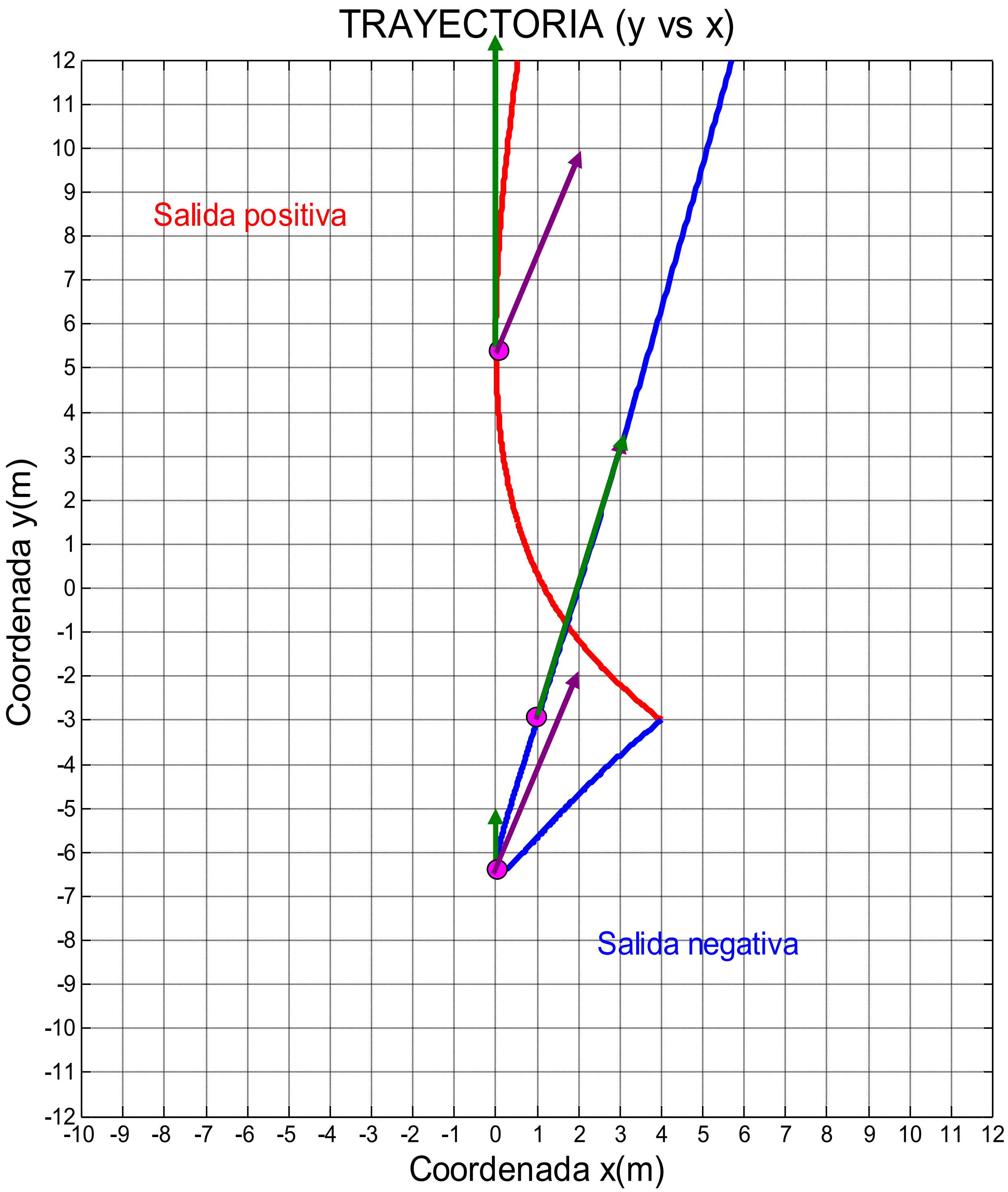
b) y **c)**

Se pide dibujar las dos trayectorias compatibles con los datos iniciales, ayudándose con los vectores velocidad y aceleración para determinar concavidades.

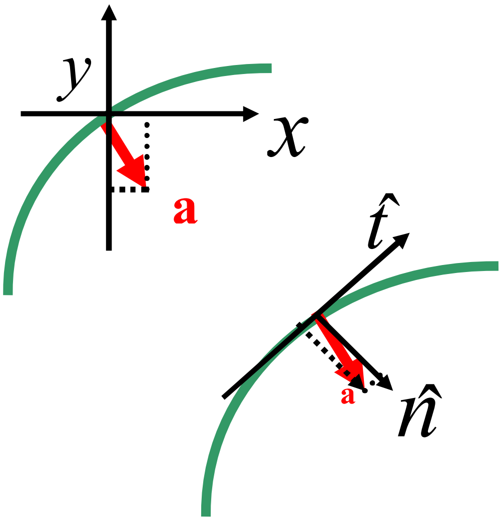
Para poder hacer esto, deberíamos determinar previamente los vectores velocidad y aceleración en varios instantes. En lugar de hacer esto, vamos a trazar las dos trayectorias con algún programa (ver apéndices I y II), vamos a indicar los vectores velocidad y aceleración en dos instantes distintos (t=2s y t=3s) y luego vamos a corroborar que todo acuerde.

Se grafica en rojo, la trayectoria correspondiente a la salida positiva y en azul la correspondiente a la salida negativa.

Sobre el mismo gráfico de la trayectoria, indicaremos los vectores velocidad (color verde) y aceleración (color violeta) para los instantes 2s+, 2s- y 3s-. Cabe aclarar que el punto de coordenadas $(x,y)=(1m,15m)$ queda fuera de la zona graficada.


TRAYECTORIA (y vs x)
Salida positiva
Salida negativa
Coordenada y(m)
Coordenada x(m)
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
-12
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

d) **Calcular en los instantes mencionados, el radio de curvatura**



Ayuda: Utilizar las relaciones entre los vectores velocidad y aceleración, y sus expresiones en coordenadas cartesianas *x,y* ***y coordenadas intrínsecas*** *n,t* . ¿Qué tenemos como datos*?*

En cartesianas x,y

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \;,\; \vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \quad con\ a^2 = a_x^2 + a_y^2$$

En intrínsecas

$$\vec{v} = v\hat{u}_t \Rightarrow \hat{u}_t = \frac{\vec{v}}{v}, \quad \vec{a} = a_t\hat{u}_t + a_n\hat{u}_n \ con \quad a^2 = a_n^2 + a_t^2 \ \ y \ \ a_t = \vec{a}\bullet\hat{u}_t$$

$$a_n = {v^2}/{\rho}$$

Por lo tanto, para determinar el radio de curvatura ρ, hay que determinar primero la a_t, luego la a_n (a partir de las expresiones mencionadas arriba) y finalmente se despeja como:

$$\rho = {v^2}/{a_n}$$

A modo de ejemplo, veamos cómo se determina el radio de curvatura para uno de los casos

Para t=2s (salida +)

$$\vec{r} = 0\hat{x} + 5.33m\hat{y}$$

$$\vec{v} = 0\hat{x} + 7\frac{m}{s}\hat{y}$$

$$\vec{a} = 2\frac{m}{s^2}\hat{x} + 4\frac{m}{s^2}\hat{y}$$

Veamos para este caso la cuenta explícita:

Determinamos primero $a_t = \vec{a}\bullet\hat{t} = \vec{a}\frac{\vec{v}}{v}$

$$a_t = \left(2\frac{m}{s^2}\hat{x} + 4\frac{m}{s^2}\hat{y}\right)\bullet\frac{\left(0\hat{x} + 7\frac{m}{s}\hat{y}\right)}{\sqrt{\left(0^2 + 49\frac{m^2}{s^2}\right)}}$$

$$a_t = \left(2\frac{m}{s^2}\hat{x} + 4\frac{m}{s^2}\hat{y}\right)\bullet\frac{\left(0\hat{x} + 7\frac{m}{s}\hat{y}\right)}{\sqrt{\left(0^2 + 49\frac{m^2}{s^2}\right)}}$$

$$a_t = \frac{\left(2\frac{m}{s^2}\hat{x}\bullet 0\hat{x} + 4\frac{m}{s^2}\hat{y}\bullet 7\frac{m}{s}\hat{y}\right)}{\frac{7m}{s}}$$

$$a_t = \frac{\left(0 + \frac{28m^2}{s^3}\right)}{\frac{7m}{s}}$$

$$a_t = 4\frac{m}{s^2}$$

Luego, considerando que:

$$\bar{a} = 2\frac{m}{s^2}\hat{x} + 4\frac{m}{s^2}\hat{y}$$

$$\Rightarrow a^2 = 4\left(\frac{m}{s^2}\right)^2 + 16\left(\frac{m}{s^2}\right)^2$$

$$a^2 = 20\left(\frac{m}{s^2}\right)^2$$

Teniendo en cuenta que:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$$

$$\Rightarrow a_n = \sqrt{20\left(\frac{m}{s^2}\right)^2 - 16\left(\frac{m}{s^2}\right)^2}$$

$$a_n = \sqrt{4\left(\frac{m}{s^2}\right)^2}$$

$$a_n = 2\frac{m}{s^2}$$

Finalmente, para obtener el radio de curvatura, usamos:

$$a_n = {}^{v^2}\!/_{\rho}$$

Con lo cual:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}$$

Determinamos previamente v^2

$$v^2 = (0)^2 + 49\frac{m^2}{s^2}$$

$$\Rightarrow v^2 = 49\frac{m^2}{s^2}$$

$$\rho = \frac{49\frac{m^2}{s^2}}{2\frac{m}{s^2}}$$

$$\rho = 24.5m$$

Presentamos los resultados para los restantes casos:

Para t=2s (salida -)

$$\vec{r} = 0\hat{x} - 6.33\hat{y}$$
$$\vec{v} = 0\hat{x} + 1\frac{m}{s}\hat{y}$$
$$\vec{a} = 2\frac{m}{s^2}\hat{x} + 4\frac{m}{s^2}\hat{y}$$

Se obtiene:

$$\rho((t = 2s)_{salida-}) = 0.5m$$

Para t=3s (salida +)

$\vec{r} = 1m\hat{x} + 15m\hat{y}$ (este punto queda fuera de la zona graficada)

$$\vec{v} = 2\frac{m}{s}\hat{x} + 12\frac{m}{s}\hat{y}$$
$$\vec{a} = 2\frac{m}{s^2}\hat{x} + 6\frac{m}{s^2}\hat{y}$$

Se obtiene:

$$\rho((t = 3s)salida\ +) = 152.85\,m$$

Para t=3s (salida -)

$$\vec{r} = 1m\hat{x} - 3m\hat{y}$$
$$\vec{v} = 2\frac{m}{s}\hat{x} + 6\frac{m}{s}\hat{y}$$
$$\vec{a} = 2\frac{m}{s^2}\hat{x} + 6\frac{m}{s^2}\hat{y}$$

Se obtiene $\rho((t = 3s)_{salida-}) \to \infty$ (es decir, que en este caso el radio tiende a infinito)

Sería interesante corroborar si los valores obtenidos para el radio de curvatura son coherentes. ¿qué significa un radio de curvatura infinito? ¿cómo espera que sea el radio de curvatura en cada punto?

e) Si el cuerpo tiene una masa de 2 kg, ¿qué fuerza neta actuaría sobre él? Expresar esta fuerza utilizando versores canónicos.

Sabemos que la aceleración está dada por:

$$\vec{a} = 2\frac{m}{s^2}\hat{x} + 2\frac{m}{s^3}t\hat{y}$$

Luego, por la Segunda Ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a} = 2kg\left(\ 2\frac{m}{s^2}\,\hat{x} + 2\frac{m}{s^3}\,t\,\hat{y}\ \right)$$

APÉNDICE 1

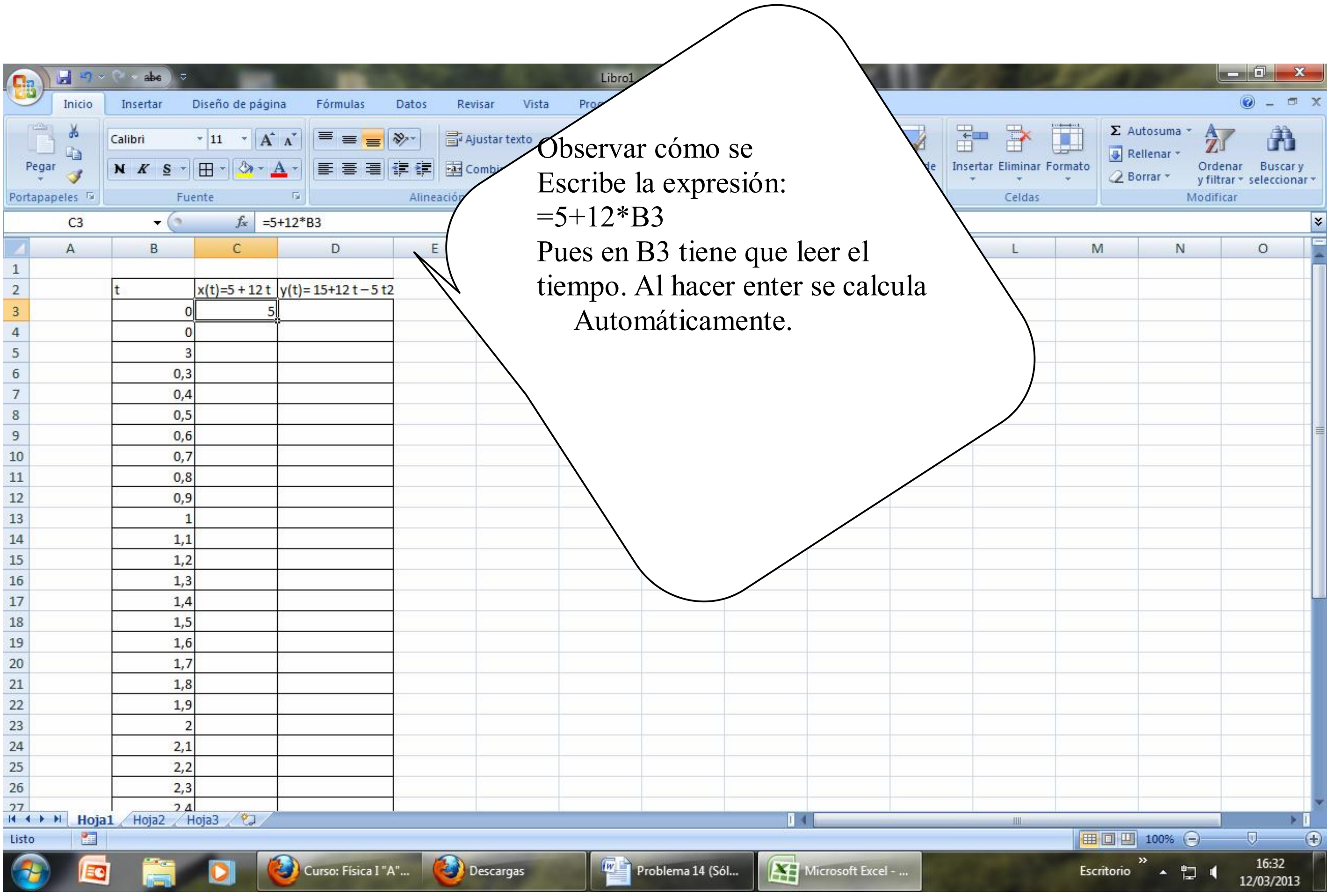
Cálculo de una trayectoria cualquiera utilizando su expresión paramétrica usando Excel.

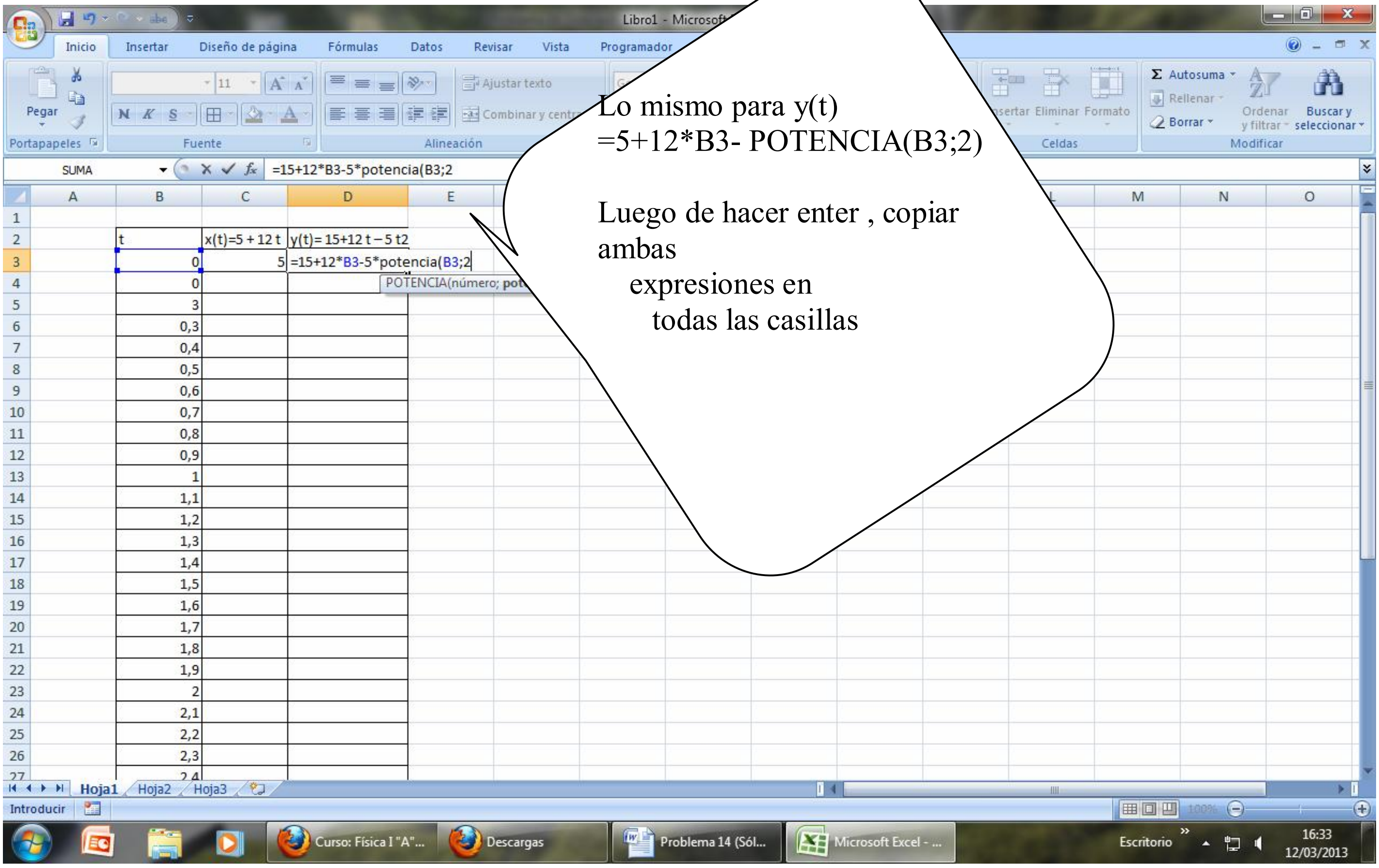
(También se podría usar cualquier otro programa como Origin, Matlab, etc.

A modo de ejemplo dibujaremos la trayectoria correspondiente a un tiro oblicuo particular. Sus ecuaciones paramétricas son (no escribimos las unidades por simpleza, dado que no las podemos poner en el programa):

$x(t) = 5 + 12\,t \quad ; \quad y(t) = 15 + 12\,t - 5\,t^2$

1) **Dibujar la tabla correspondiente donde se calcularán, simultáneamente, cuánto valen ambas componentes para un mismo tiempo. Elegir una**



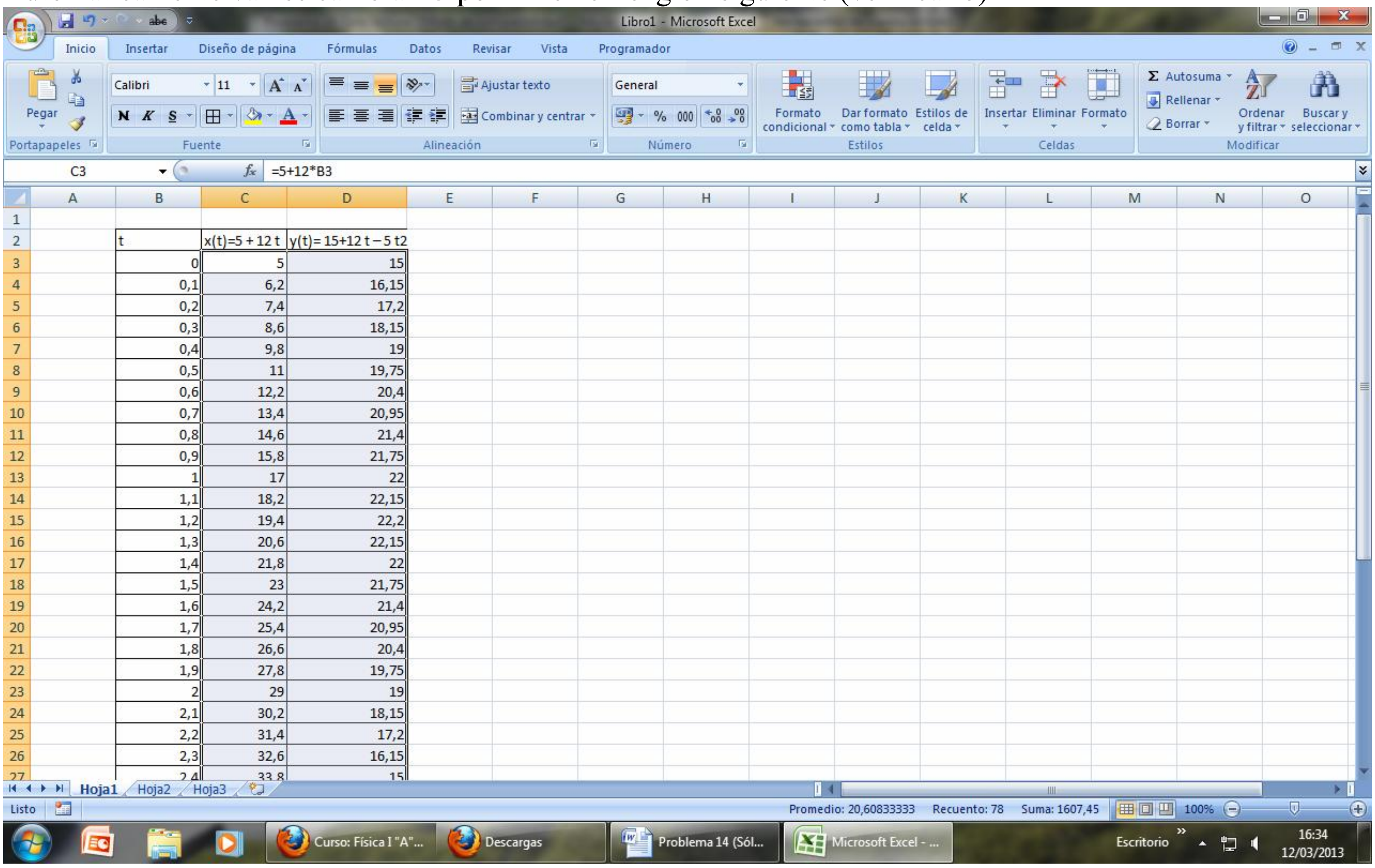


	t	x(t)=5 + 12 t	y(t)= 15+12 t – 5 t2
3	0	5	=15+12*B3-5*potencia(B3;2
4	0		
5	3		
6	0,3		
7	0,4		
8	0,5		
9	0,6		
10	0,7		
11	0,8		
12	0,9		
13	1		
14	1,1		
15	1,2		
16	1,3		
17	1,4		
18	1,5		
19	1,6		
20	1,7		
21	1,8		
22	1,9		
23	2		
24	2,1		
25	2,2		
26	2,3		

Lo mismo para y(t)
=5+12*B3- POTENCIA(B3;2)

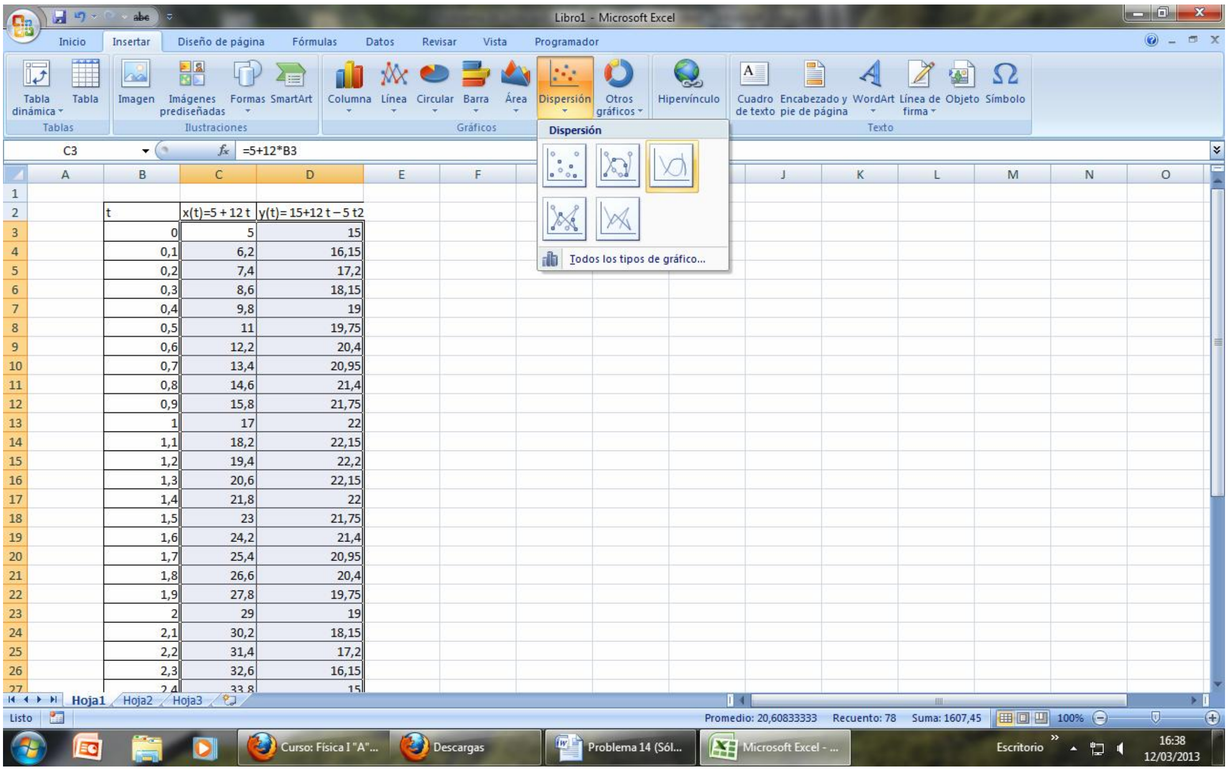
Luego de hacer enter , copiar ambas
expresiones en
todas las casillas

Automáticamente van se cambia B3 por B4 en el renglón siguiente (verificarlo)

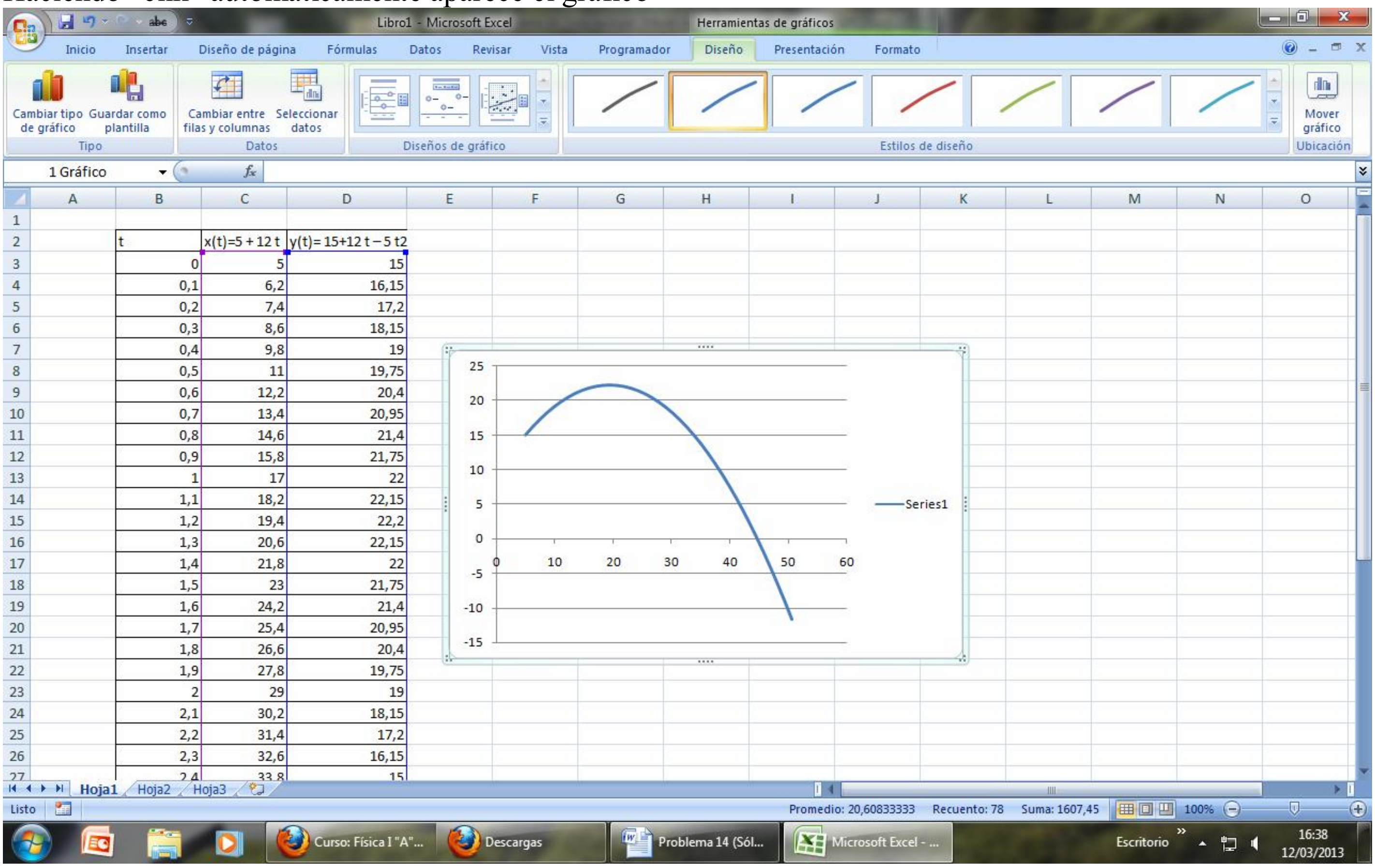


	t	x(t)=5 + 12 t	y(t)= 15+12 t – 5 t2
3	0	5	15
4	0,1	6,2	16,15
5	0,2	7,4	17,2
6	0,3	8,6	18,15
7	0,4	9,8	19
8	0,5	11	19,75
9	0,6	12,2	20,4
10	0,7	13,4	20,95
11	0,8	14,6	21,4
12	0,9	15,8	21,75
13	1	17	22
14	1,1	18,2	22,15
15	1,2	19,4	22,2
16	1,3	20,6	22,15
17	1,4	21,8	22
18	1,5	23	21,75
19	1,6	24,2	21,4
20	1,7	25,4	20,95
21	1,8	26,6	20,4
22	1,9	27,8	19,75
23	2	29	19
24	2,1	30,2	18,15
25	2,2	31,4	17,2
26	2,3	32,6	16,15

Para graficar: “pintar” las columnas de valores c y d. y luego insertar gráfico (Modo: dispersión x,y, para que tome los datos de la primera columna (x) como la absisa y los datos de la segunda columna (y) como ordenada.



Haciendo “clik” automáticamente aparece el gráfico



APÉNDICE 2

A continuación se copia un programa hecho en Matlab que grafica las dos trayectorias posibles que verifican los datos dados para el problema 14 de la guía de Cinem.

```
%Todo lo que aparece al lado de "%" son comentarios que no forman parte de
%las instrucciones del programa
%problema obligatorio 1 Curso Garea- Problema 14 Guía de problemas,
%Cinemática y Dinámica de la partícula
%vx=2t-4; ay=2t; v0=5m/s; x0=4m; y0=-3m
%Importante: Cuando se hace correr el programa cliquear sobre el gráfico
%cuando aparece cada una de las curvas.

close all
clear all

t=0:0.01:10;
y1=((t.^3)/3)+3*t-3
x1=t.^2-4*t+4
plot(x1,y1,'r','LineWidth',3)
axis equal
axis([-10 10 -10 10])
set(gca,'XTick',-10:1:10,'FontSize',12)
set(gca,'YTick',-10:1:10,'FontSize',12)
gtext('{\color{red}Salida positiva}','FontSize',16)
xlabel('Coordenada x(m)','FontSize',18);
ylabel('Coordenada y(m)','FontSize',18);

hold on
y2=((t.^3)/3)-3*t-3
x2=t.^2-4*t+4
plot(x2,y2,'b','LineWidth',3)
axis equal
axis([-10 12 -12 12])
set(gca,'XTick',-12:1:12,'FontSize',12)
set(gca,'YTick',-12:1:12,'FontSize',12)
gtext('{\color{blue}Salida negativa}','FontSize',16)
xlabel('Coordenada x(m)','FontSize',18);
ylabel('Coordenada y(m)','FontSize',18);

Title (['TRAYECTORIA (y vs x)'],'FontSize',20)
grid on
```